Sommes d'entiers élevés à une puissance quelconque

Michel Volle

Avril 2014

Résumé

Ce papier présente la récurrence qui permet de calculer la somme des n premiers entiers élevés à une puissance entière quelconque k :

$$S_k(n) = \sum_{m=1}^{n} m^k.$$

Nous écrirons le plus souvent S_k tout court pour $S_k(n)$.

Nota Bene : La solution de ce problème a été publiée en 1665 par Blaise Pascal (1623-1662) dans le traité *Potestatum Numericarum Summa* (*Sommation des puissances numériques*[1]) qui fait partie d'un ensemble de travaux consacrés aux permutations. Nous le reprenons en utilisant des notations modernes.

1 Récurrence

Il est évident que $S_0 = n$ et il est bien connu que :

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. On trouve ce traité dans les *Œuvres complètes* de Pascal, collection de la Pléiade, Gallimard 1954. Le texte en latin est à la p. 166, sa traduction en français à la p. 1427.

Nous allons montrer comment calculer S_k pour k quelconque.

Il est évident que :

$$\Sigma = \sum_{m=2}^{n+1} m^{k+1} = S_{k+1} + (n+1)^{k+1} - 1,$$

et que par ailleurs [2] :

$$\Sigma = \sum_{m=1}^{n} (m+1)^{k+1} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} m^{k+1-p},$$

d'où :

$$\Sigma = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} S_{k+1-p},$$

ou, en développant les deux premiers termes de cette somme :

$$\Sigma = S_{k+1} + (k+1)S_k + \sum_{p=2}^{k+1} \binom{k+1}{p} S_{k+1-p}.$$

Donc :

$$S_{k+1} + (k+1)S_k + \sum_{p=2}^{k+1} \binom{k+1}{p} S_{k+1-p} = S_{k+1} + (n+1)^{k+1} - 1,$$

d'où la récurrence qui permet de calculer S_k connaissant $S_{k-1}, S_{k-2}, ..., S_0$:

$$\boxed{(k+1)S_k = (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{p=2}^{k+1} \binom{k+1}{p} S_{k+1-p}}$$

Cette relation se développe ainsi :

$$(k+1)S_k = (n+1)^{k+1} - 1 - \frac{(k+1)k}{2} S_{k-1} - ... - S_0$$

2. Nous utilisons la notation :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

.

2 Exemples

Nous allons appliquer la récurrence au calcul de quelques valeurs de S_k.

2.1 Calcul de S_1

Nous connaissons bien sûr la valeur de S_1 mais nous allons la recalculer à titre d'exercice.

La récurrence donne :

$$2S_1 = (n+1)^2 - 1 - S_0$$

$$2S_1 = n^2 + 2n + 1 - 1 - n = n(n+1),$$

d'où le résultat bien connu.

2.2 Calcul de S_2

La récurrence donne :

$$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - 3S_1 - S_0$$

soit :

$$S_2 = \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n) - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3}$$

On trouve tout calcul fait :

$$S_2 = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$$

2.3 Calcul de S_3

La récurrence donne :

$$4S_3 = (n+1)^4 - 1 - 6S_2 - 4S_1 - S_0$$

On trouve tout calcul fait :

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

et donc $S_3 = S_1^2$.

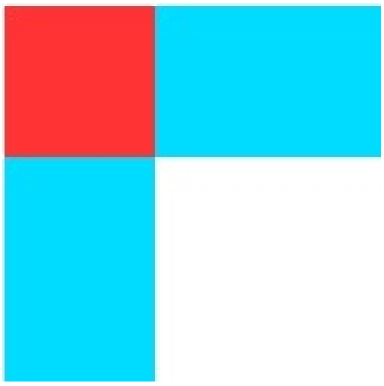
Cette relation est surprenante. En voici une interprétation géométrique :

– représentons S_1 par un segment de droite de longueur S_1, constitué par une succession d'intervalles de longueur :

$$1,\ 2, ...,\ k, ...,\ n,$$

– construisons le grand carré ayant ce segment pour côté. Sa surface est égale à S_1^2.

On peut la découper en n éléments comportant un petit carré de surface k^2 et deux rectangles ayant chacun pour surface $kS_1(k-1) = k^2(k-1)/2$.



Élément correspondant à $k = 4$

La surface d'un élément étant égale à k^3, la surface du grand carré est égale à S_3.

2.4 Calcul de S_4

La récurrence donne :

$$5S_4 = (n+1)^5 - 1 - 10S_3 - 10S_2 - 5S_1 - S_0$$

On trouve tout calcul fait :

$$S_4 = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)$$

2.5 Calcul de S_k

On peut utiliser la récurrence pour calculer S_k avec k quelconque après avoir calculé l'une après l'autre les valeurs de $S_0, ..., S_{k-2}, S_{k-1}$.

3 Autres résultats

Outre le calcul de S_k Pascal a trouvé plusieurs résultats annexes, notamment la somme des puissances des entiers formant une suite quelconque ou une suite obtenue en leur appliquant une fonction affine.

3.1 Suite quelconque

$S_k = S_k(n)$ est la somme des puissances k des nombres de la suite $1, 2, 3$ ...,n. Considérons une suite commençant non par 1 mais par un entier quelconque a, soit $a, a+1, a+2$ ...,n.

La somme des puissances k de ces nombres est évidemment :

$$\sum_{m=a}^{n} m^k = S_k(n) - S_k(a-1)$$

3.2 Multiplication par un nombre

Considérons la suite $b, 2b, 3b$ ...,nb, obtenue en multipliant par le nombre b la suite $1, 2, 3$ ...,n.

La somme des puissances k de ces nombres est évidemment :

$$\sum_{m=1}^{n} b^k m^k = b^k S_k$$

3.3 Fonction affine

Considérons la suite $a+b, a+2b, a+3b,\ \ldots, a+nb$, ou a et b sont des nombres quelconques (éventuellement des entiers) et faisons la somme de ses termes portés chacun à la puissance k.

Le terme courant de cette somme est :

$$(a+bm)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a^p b^{k-p} m^{k-p}$$

En additionnant ce terme de $m=1$ à $m=n$ on trouve :

$$\sum_{m=0}^{n} (a+bm)^k = a^k + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a^p b^{k-p} S_{k-p},$$

qui donne le résultat une fois connues les valeurs de S_0, S_1, S_2 ..., S_k.

On peut ainsi, comme le dit Pascal, calculer la somme des puissances de nombres entiers formant une suite qui commence par un entier quelconque et progresse selon un pas entier lui-même quelconque.

* *

Pascal termine son traité par la phrase suivante : « Ceux qui sont tant soit peu au courant de la doctrine des *indivisibles* ne manqueront pas de voir quel parti on peut tirer des résultats qui précèdent pour la détermination des aires curvilignes. Ces résultats permettront de carrer immédiatement tous les genres de paraboles et une infinité d'autres courbes. »

Le petit calcul auquel nous venons de nous livrer avait donc, dans son esprit, des applications qui précèdent et annoncent l'invention du calcul intégral par Newton et Leibniz.

* *